TOETS DISCRETE STRUCTUREN

16-3-2012

□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld. ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

Opgave 1. (10 pt) Gegeven is een universele verzameling U, met deelverzamelingen A, B en C waarvoor geldt dat $A \cup B = A \cup C$. Bewijs dat $B - A \subseteq C$. Benoem de gebruikte regels.

Opgave 2. (10 pt) Gegeven het alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, en de reguliere expressies $\alpha = a \vee b$ en $\beta = c^*$. Geef de reguliere verzamelingen die corresponderen met elk van de volgende drie reguliere expressies: $\alpha\beta$, $\alpha \vee \beta$, en α^*.

Opgave 3. (10 pt) Bekijk f_n, de rij van Fibonacci, gedefineerd door de recurrente betrekking: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ voor $n \geqslant 3$, met $f_1 = f_2 = 1$. Bewijs met volledige inductie dat f_{3n} een even geheel getal is voor alle $n \in \mathbb{Z}^+$.

Opgave 4. (10 pt) Los de volgende recurrente betrekking op: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_1 = 1, a_2 = 5, n \in \mathbb{Z}^+$.

Opgave 5. (5 pt) Bekijk de binaire operatie $\oplus$ (symmetrisch verschil) op deelverzamelingen van een universele verzameling U. Is deze operatie: (i) gesloten? (ii) commutatief? Motiveer je antwoord.

Opgave 6. (15 pt) Laat $R = \{(1,2), (2,2), (2,3), (4,4), (4,5)\}$ een relatie zijn op $A = \{1,2,3,4,5\}$.

a. Teken de graaf van R.
b. Is R reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch?
c. Is de relatie R een functie?
d. Geef de verbondenheidsrelatie R^∞.
e. Bepaal de kleinste equivalentierelatie $R^\sim$ die R bevat en teken de graaf van $R^\sim$. Wat zijn de bijbehorende equivalentieklassen?

Opgave 7. (10 pt) Gegeven is een reflexieve en transitieve relatie R op een verzameling A. Bewijs dat $R^2 = R$.

Opgave 8. (10 pt) Laat $A = B = P(S)$, waarbij S een verzameling is. De functie $f : A \to B$ is gedefinieerd als $f(X) = \overline{X}$, waarbij $\overline{X}$ het complement van de verzameling X is. Bewijs dat f een 1-1 correspondentie is tussen A en B. Geef de inverse functie f^{-1}.

Opgave 9. (5 pt) Gegeven zijn de functies $f(n) = 2^n + n^{10}$, $g(n) = n! + 2^n$, $h(n) = n^4 - 3n^2 + \sqrt{n}$, met $n \in \mathbb{Z}^+$. Geef de Θ-klasse van elk van deze drie functies. Motiveer je antwoord.

Opgave 10. (15 pt) Gegeven is een verzameling $A = \{a, b, c, d\}$, met de volgende twee relaties op A:
$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (c,a), (c,b), (a,d), (b,d), (c,d)\}$ en $R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (d,c)\}$.

a. R_1 en R_2 zijn beide partiële ordeningen. Waarom is dit zo?
b. Teken de Hasse diagrammen van R_1 en R_2.
c. Geef een topologische ordening van R_1.
d. Is de relatie $R_1 \cup R_2$ een partiële ordening? Motiveer je antwoord.